

Calcul mental : quelques repères

Les programmes 2008 distinguent la « mémorisation des tables » du « calcul mental » : quelques repères sont proposés ci-dessous pour orienter les pratiques d'enseignement du calcul mental.

1 – Construire la mémoire des tables.

Les élèves « mémorisent les tables » : ce sont des faits arithmétiques... Au total, bien que le nombre de « faits » soit restreint, ces tables résistent : « Les informations qu'elles contiennent ne sont pas arbitraires et indépendantes les unes des autres. Au contraire, leurs contenus s'entremêlent étroitement. Elles fourmillent de fausses régularités, de rimes troublantes, de jeux de mots trompeurs. » S. Dehaene – La bosse des maths.

Tous les résultats doivent être immédiatement disponibles en fin d'école élémentaire (avec un taux élevé de réussite).

Les tables s'enseignent !

Le critère de réussite, c'est la vitesse de réaction ; l'objectif, c'est l'instantanéité pour les tables d'addition et de multiplication. Avec une progressivité raisonnée et un apprentissage à conduire à l'école, c'est un enseignement, renforcé et soutenu par les révisions nécessaires à la maison.

Apprendre par cœur engage une coresponsabilité enseignant – élève : c'est d'abord un enseignement. Les tables sont à étudier, à observer : pairs/impairs – doubles et moitiés : 7×4 est le double de 7×2 – caractéristiques de certains multiples 2, 5 et 10 – liaison entre les résultats – $6 \times 9 = 6 \times 10 - 6$ etc.). La progressivité de cet enseignement (rappel des repères ci-dessous), sa densité, la régularité et la fréquence de l'entraînement, le choix des supports (les tables) destinés à l'apprentissage concourent à son efficacité : du point de vue des « connaissances », les tables doivent être sues ; du point de vue des « capacités », elles doivent être disponibles, utilisables, sans artifice de récupération long et lourd. Toute reconstruction suppose des calculs, une mobilisation de la mémoire qui sera fatale lorsqu'il faudra utiliser en situation ses connaissances. Cependant, la reconstruction n'est pas identique dans les deux domaines (additif – multiplicatif).

Addition : des stratégies de recomposition mentale peuvent être rapides et performantes (7 et 5 peuvent être « visualisés » et recomposés en 5 et 5 et 2 : ce mode peut conduire à des réponses aussi rapides que le résultat mémorisé, il a cependant un « coût » cognitif qui est très sensiblement supérieur).

Multiplication : la reconstruction est IMPOSSIBLE (ou très complexe : 7×8 est le double de 7×4 ou 7 de plus que 49... les calculs ne sont pas aisés).

Ces deux tables ne semblent pas compartimentées séparément en mémoire (d'où certaines associations, confusions, un ralentissement général lorsqu'on débute un nouvel apprentissage) ; un point commun est sensible, c'est la difficulté de restitution qui s'accroît avec la taille des nombres (réponses plus lentes et taux d'échec croissant en relation avec la taille du nombre : ex $3+4$ comparable à 3×4 plus rapide et mieux réussi que $8+9$ comparable à 8×9).

Enfin, une part de mémoire verbale intervient dans la restitution ; le calcul s'inscrit dans la langue dans laquelle on l'apprend (oraliser, marmonner sont des recours quasi permanents et durables).

Remarques : une recherche auprès d'adultes performants montre que le temps de réponse à des interrogations (QCM) du type

$$7 + 5 = \boxed{35} \quad \boxed{12}$$

est supérieur au temps nécessaire lorsque les résultats mémorisés des tables n'interfèrent pas dans le choix. La mémoire stocke des associations privilégiées (7,5,12) et (7,5,35) avec les interférences dues à certaines ressemblances... Cela ne doit pas être négligé dans l'enseignement.

Outils d'élèves : une aide efficace tient en des tables – addition ou multiplication sous forme de tables de Pythagore- où l'élève gomme les résultats mémorisés (vérification faite lors de diverses interrogations). Ces supports ne laissent apparaître que les résultats les plus « résistants » sur lesquels chacun focalise alors son attention (le caractère évolutif de cet outil, y compris le retour en arrière, semble très constructif et permet de différencier le travail d'accompagnement).

Les interrogations :

- fréquence et variété

Les formes de l'interrogation doivent varier autour d'un même résultat. Attention cependant à un enseignement privilégiant la « récitation des tables » qui impose la reprise de toute une litanie lorsqu'un résultat est oublié.

Interroger efficacement consiste à jouer des combinaisons multiples autour des tables.

A ($7+8=15$) ou ($7 \times 8=56$) correspondent de multiples combinaisons :

$7 + 8 = ?$ $8 + 7 = ?$ $7 + ? = 15$ $? + ? = 15$ $15 - ? = 8$ $? - 7 = 8$ Combien manque-t-il à 7 pour faire 15 ? Complète 7 pour arriver à 15 7 pour aller à 15 ...	$7 \times 8 = ?$ $8 \times 7 = ?$ $7 \times ? = 56$ $? \times ? = 56$ $? : 7 = 8$ Comptage décomptage de n en n En 56 combien de fois 7 ? 56 divisé par 7 Partage 56 en 7 (parts égales) En 50 combien de fois 7 ? ...								
Les QCM, les jeux vrais/faux sont des formes d'interrogations qui permettent de travailler les associations (la mémoire des tables associe deux résultats au même couple de nombres - par exemple pour 7 et 8, les résultats 15 et 56 sont immédiatement mobilisés), les diverses proximités (56 et 54 sont des résultats à distinguer dans des tables différentes) et la vitesse de réaction :									
<table> <tr> <td>$7 + 8 =$</td> <td>78</td> <td>15</td> <td>56</td> </tr> <tr> <td>$7 + 8 =$</td> <td>78</td> <td>15</td> <td>56</td> </tr> </table>		$7 + 8 =$	78	15	56	$7 + 8 =$	78	15	56
$7 + 8 =$	78	15	56						
$7 + 8 =$	78	15	56						
<table> <tr> <td>$7 \times 8 =$</td> <td>48</td> </tr> <tr> <td>$6 \times 5 =$</td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>$5 \times 3 =$</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>$7 \times 9 =$</td> <td>20</td> </tr> </table>		$7 \times 8 =$	48	$6 \times 5 =$	36	$5 \times 3 =$	15	$7 \times 9 =$	20
$7 \times 8 =$	48								
$6 \times 5 =$	36								
$5 \times 3 =$	15								
$7 \times 9 =$	20								
Ce dernier cas, manifestement incorrect, est très différents des précédents (pas de proximité et d'association). Ce type d'interrogations (V/F) peut conjuguer plusieurs demandes (1 ^{er} temps : barrer les égalités erronées – TGV ! – 2 nd temps : corriger la droite ou la gauche du signe d'égalité)									

- oral / écrit

L'image mentale des calculs construite par chacun de nous et la part de mémoire verbale sollicitée invitent à envisager la complémentarité des modes d'interrogation : alternances de propositions écrites (pas de lecture de l'enseignant) et orales (aucun support écrit) – avec une permanence : aucun travail écrit de l'élève dans les deux cas.

Dans l'exemple ci-dessous, on observera que l'utilisation des résultats mémorisés dans des situations de calcul mental n'est pas facilitée à l'oral, beaucoup plus explicite à l'écrit (dans l'exemple, la transposition aux dizaines du résultat $[7+3]$ est plus évidente à l'écrit) :

A l'oral (pas de lien entre) trois et sept dix / trente et soixante-dix cent
 A l'écrit (le lien est tangible) $3 + 7 = 10$ $30 + 70 = 100$

Rappel des repères (programmes 2008) :

Maternelle :	CP :	CE1 :	CE2 :
Compléments à 5 Compléments à 10 débutés Quelques doubles	Compléments à 10 Doubles (<10) et moitiés (<20) Tables d'addition Table de multiplication par 2	Tables de multiplication 2, 3, 4, 5	Tables de multiplication

2 – Le « calcul mental » : des procédures de l'apprentissage à l'automatisme

L'exercice du calcul mental, c'est la mise en œuvre de procédures où les résultats mémorisés interviennent comme des connaissances à la base des traitements attendus ; ces procédures spécifiques au calcul mental sont à enseigner pour que les apprentissages conduisent à des automatismes !

Paradoxe de l'automatisme (voir Denis BUTLEN « le nombre au cycle 2 ») : de très nombreux élèves disent en calcul mental avoir « posé l'opération dans leur tête ». C'est une gestion qui est très lourde, peu efficace dès que les tâches se complexifient. La prégnance du calcul posé à l'école, une tradition, a un poids considérable.

Le calcul mental devrait précéder tout calcul posé.

Parmi la diversité des procédures, quelques priorités –dessous) sont à enseigner (dans tous les cas évoqués ci-dessous, on pourra mesurer l'impact, au moment des interrogations, de la présentation écrite ou orale).

Remarque : ces procédures doivent être repérées, formalisées, nommées pour être ensuite reconnues et enfin apprises par les élèves (cahier mémoire, affichage provisoire).

- Calculer « par la gauche » :

La référence au calcul posé fait prévaloir le traitement unités, dizaines, centaines... (de droite à gauche). On peut recommander de commencer par la gauche en calcul mental. Il s'agit de conserver en mémoire l'essentiel des données tout au long du traitement.

Deux exemples de gestion :

☒ $654 + 321$ (321 est décomposé en $300 + 20 + 1$) $\dot{\cup}$ $654 + 300$ (en mémoire 21 et 954) $\dot{\cup}$ $954 + 20$ (en mémoire 1 et 974) $\dot{\cup}$ (974 et 1) $\dot{\cup}$ 975

- $654 + 321$ (les deux nombres sont décomposés) $\dot{\cup}$ $600 + 50 + 4 + 300 + 20 + 1$ $\dot{\cup}$ $600 + 300 = 900$ $\dot{\cup}$ $50 + 20 = 70$ $\dot{\cup}$ $4 + 1 = 5$ $\dot{\cup}$ $900 + 70 + 5 = 975$
Cette seconde décomposition impose la vitesse de traitement pour conserver en mémoire de travail les données successives à recomposer à la fin.

Multiplication : 654×3 $\dot{\cup}$ $(600 + 50 + 4) \times 3$ $\dot{\cup}$ $1800 + (50 \times 3)$ (4x3 en mémoire) $\dot{\cup}$ $1950 + (4 \times 3)$ $\dot{\cup}$ 1962

Cette logique de procédure s'enseigne ; il s'agit de limiter le stockage en mémoire du nombre de données nécessaires à la poursuite du calcul. Cela s'automatise : un entraînement est indispensable ; la vitesse est un facteur qui joue sur la mémoire de travail dont la capacité est relativement limitée.

- Au-delà de deux nombres :

Il faut proposer des calculs plus longs (former à la double gestion du traitement du calcul associé à la mémorisation des résultats partiels et des données initiales).

$$12 + 9 + 24 + 3$$

$$65 - 20 - 6$$

$$(32 \times 4) - 8$$

On peut y glisser des appariements facilitant la gestion :

$$12 + 9 + 18 + 11 \text{ (les compléments à 10)}$$

$$65 - 20 - 5$$

$$(30 - 6) \times 5 \dot{\cup} 30 \times 5 - 6 \times 5$$

...

- Repérer la référence aux résultats mémorisés dans un calcul.

Un travail doit être réalisé pour passer des tables (ex. $3 + 7 = 10$) à des situations où on va appliquer ce résultat mais en transposant... Où se cache $(3 + 7)$?

$$30 + 70$$

$$17 + 3$$

$$34 + 70$$

$$3,4 + 7$$

$$130 + 170$$

$$0,7 + 70,3$$

- Les enseignements relatifs au calcul, au nombre et à la numération sont très interdépendants !

Ø Décomposition des nombres :

Nombres et calcul sont intimement liés ; les décompositions des nombres sont très souvent sollicitées pour faciliter les traitements.

$$654 = 600 + 50 + 4 = 65 \times 10 + 4$$

$$6,54 = 6 + 54/100 = 6 + 5/10 + 4/100$$

Ø Multiplication et division par 10, 100, 100 :

La maîtrise de la multiplication par 10, 100, 1000 entre dans ce renforcement mutuel nombre / calcul (travail plus performant que des mécaniques incertaines liées à l'ajout ou retrait de 0).

Ø Approximation :

Parent pauvre du calcul, l'approximation repose d'abord sur une bonne connaissance de la numération (le repérage sur une droite graduée est un outil précieux).

Un exemple : $572 + 219$ (ou 572×219)

L'approximation de ce résultat passe par le traitement séparé des deux nombres de départ (choisir un arrondi pertinent pour chacun des deux termes ; beaucoup d'élèves procèdent au calcul exact – très résistant ! – puis approximent le résultat !):

$$500 < 572 < 600 \quad 200 < 219 < 300 \quad \text{soit une somme proche de } 800$$

Ø Des repères (toujours très proches de la maîtrise des nombres) :

C'est le sens de quelques repères procéduraux qui méritent un entraînement spécifique car très fréquents dans les étapes du calcul mental (voir Denis Butlen « le nombre au cycle 2 »):

- Compléter à la dizaine, centaine supérieure : $32 \rightarrow 40$ $327 \rightarrow 400$...
- Trouver le complément (multiples de 10 de 100) : $25 \rightarrow 325$ $1235 \rightarrow 1635$...
- Ajouter, soustraire, multiplier par des multiples de 10 et 100 :
 $1234 + 500$ $1370 - 500$ 19×20 50×30 ...
- Exprimer un nombre par rapport à une puissance de 10 supérieure : $47 = 100 - ?$
- Compléter des égalités du type : $37 + 18 = 47 + ?$ $27 + 8 = 30 + ?$
- Utiliser commutativité et associativité $54 + 17 + 6$ $45 \times 3 \times 2$

Il s'agit de privilégier une réelle intelligence du traitement plutôt qu'une conception mécaniste, activiste, du calcul mental. Cela repose sur des connaissances mémorisées performantes.

Les « nombres sympathiques » permettent une facilitation du calcul proposé ; le zéro a une place importante (souvent simplificatrice) dans le calcul mental, d'où cette dénomination qualifiant les nombres compléments à 10 (ou aux dizaines et centaines) dans la somme, les multiples de 10 dans la multiplication, les multiples aisés (25, 50, 100 ont des relations à faire apprendre) ...

$$54 + 17 + 6 \quad \text{voir que } 54 \text{ et } 6 \text{ sont « sympathiques »}$$
$$45 \times 3 \times 2 \quad \text{préférer } 45 \times 2 \text{ initial qui facilitera } 90 \times 3$$

Cette conception du calcul se fonde sur une articulation efficace entre les tables (résultats mémorisés) et des procédures (enseignées, reconnues, nommées) à la base des programmes 2008. On n'est pas ici dans une logique de « calcul rapide » mais d'apprentissage de procédures qui passent par un repérage des caractéristiques des nombres proposés (c'est une analyse qui s'apprend) préalable à l'engagement dans le calcul lui-même : cela prend appui sur une bonne compréhension du système décimal et des connaissances efficaces des tables.

JJ CALMELET

IEN Marcq-en-Barœul ~ 59

décembre 2010